Ab jetzt betrachten wir nur noch <u>reguläre Kurven</u> $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$.

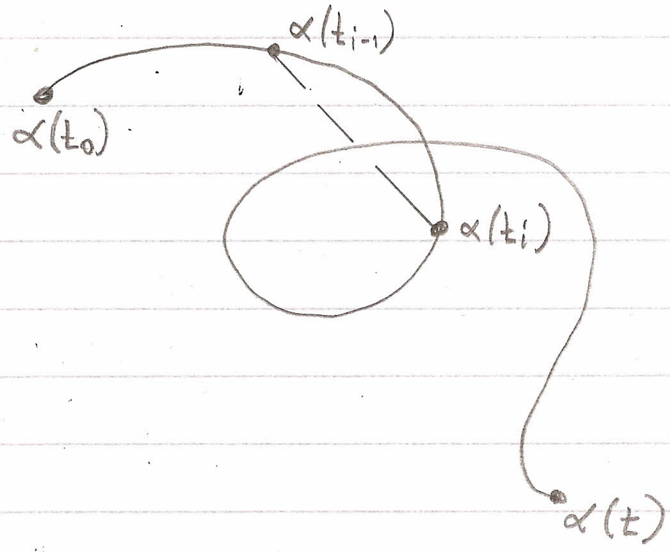
<u>Definition:</u> (<u>Bogenlänge</u>)

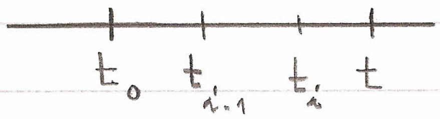
Sei $t_0 \in I$ gegeben. Dann heißt die Funktion

$$\rho : I \to \mathbb{R}, \qquad \rho(t) := \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)| \, d\tau,$$

die <u>Bogenlänge von α bzgl. t_0</u>.

<u>Interpretation:</u>





Sei etwa $t_0 < t$. Man unterteilt $[t_0, t]$ in der Form $t_0 < t_1 < \ldots < t_k = t$ mit Teilpunkten t_i und ersetzt das Kurvenstück $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ durch die Strecke von $\alpha(t_{i-1})$ nach $\alpha(t_i)$. Die "Länge

"

der Kurve $\alpha|_{[t_0,t]}$ wird dann anschaulich genähert durch

$$\sum_{j=1}^{k} |\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})| =$$

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})|}{t_j - t_{j-1}} (t_j - t_{j-1}) \longrightarrow$$

$$\int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)|\, d\tau ,$$

wobei im Grenzübergang die Einteilung von $[t_0, t]$ immer feiner gemacht wird.

<u>Folgerung aus der Definition</u>: Wegen $|\alpha'(\tau)| > 0$ ist

$$s'(t) = |\alpha'(t)| > 0 ,$$

d.h. die Bogenlänge ist streng monoton wachsend und besitzt daher eine Umkehrfunktion $\varphi : J \to I$, wobei $J := \text{Bild}(s) = \text{Intervall in } \mathbb{R}$.

(Bemerke: für $t < t_0$ ist $s(t) < 0$, so dass J auch negative Zahlen enthält, es sei denn, die Wahl t_0 = linker Endpunkt von I ist möglich)

Damit betrachtet man die

Umparametrisierung von α nach der Bogenlänge

$$\bar{\alpha} : J \to \mathbb{R}^n, \quad \bar{\alpha}(\tau) := \alpha(\varphi(\tau)).$$

Es gilt für $\tau \in J$:

$$\bar{\alpha}'(\tau) = \alpha'(\varphi(\tau))\, \varphi'(\tau),$$

$$\varphi'(\tau) = 1/_{\rho'(\varphi(\tau))} = |\alpha'(\varphi(\tau))|^{-1},$$

d.h.:

$$\boxed{|\bar{\alpha}'| \equiv 1 \text{ auf } J.}$$

Ergebnisse:

- Man kann jede reguläre Kurve nach der Bogenlänge umparametrisieren.
- Dabei bleibt die Spur erhalten; ebenso der Durchlauf-

sinn, denn $\overline{\alpha}'(\tau) = \dfrac{\alpha'(\varphi(\tau))}{|\alpha'(\varphi(\tau))|}$.

- Das Parameterintervall ändert sich, die Durchlaufgeschwindigkeit wird auf Länge 1 normiert.

$\square$

<u>Bemerkung:</u> Ist $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $\Psi: I \to J$ eine $\underbrace{\text{differenzierbare Bijektion}}_{}$ mit $\Psi' \neq 0$ zwischen den Intervallen I und J (also Ψ entweder streng fallend oder streng wachsend), dann ist allgemein $\tilde{\alpha}(s) := \alpha(\Psi^{-1}(s))$, $s \in J$, eine Umparametrisierung von α. $\tilde{\alpha}$ ist regulär, wenn α dies ist.

<u>Spezialfall:</u> $\alpha: (a,b) \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{\alpha}: (-b,-a) \to \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{\alpha}(t) := \alpha(-t)$. Hier ist $\Psi^{-1}(t) = -t$ für $t \in (-b,-a)$, und $\tilde{\alpha}$ unterscheidet sich von α nur dadurch, dass die Spur jetzt rückwärts durchlaufen wird (Orientierungsumkehrung).

Anhang zu §1 : Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$

Sei $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ die orientierte Standardbasis des $\mathbb{R}^3$, also $\overline{e}_1 = (1,0,0)$, $\overline{e}_2 = (0,1,0)$, $\overline{e}_3 = (0,0,1)$. Wir einigen uns darauf, diese als positiv orientiert zu bezeichnen.

Ist $(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3)$ eine weitere orientierte Basis in $\mathbb{R}^3$, so setzt man

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad A\overline{e}_i := \overline{f}_i$$

und nennt $(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3)$ positiv (negativ) orientiert, falls $\det A > 0$ (< 0) ist. A ist die Matrix des Basiswechsels von $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ nach $(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3)$.

Beispiel: $(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3) := (\overline{e}_1, \overline{e}_3, \overline{e}_2)$

Dann ist $A\overline{e}_1 = \overline{e}_1$, $A\overline{e}_2 = \overline{e}_3$, $A\overline{e}_3 = \overline{e}_2$;

die Transformationsmatrix lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\hat{=} \quad (A\bar{e}_1 \ \ A\bar{e}_2 \ \ Ae_3) \right)$$

mit $\qquad \det = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 .$

Sind $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ beliebig, und tragen wir diese Vektoren als z.B. Spalten in eine Matrix ein, so ist

$$\det (u \ v \ w)$$

nach den Eigenschaften von det in jedem Argument eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, wenn die beiden jeweils anderen Argumente fixiert sind. Wir betrachten

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \ni w \mapsto \det (u \ v \ w)$$

und benutzen :

Ist $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ linear, so gilt es genau einen Vektor $\eta \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(w) = w \cdot \eta \quad \forall \, w \in \mathbb{R}^3$$

η stellt φ bzgl. des Euklidischen Skalarproduktes

$$w \bullet \eta = \sum_{i=1}^{3} w_i \eta_i$$

dar. Im Fall des Funktionals Φ hängt η von u und v und wird mit $u \times v \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet.

<u>Definition:</u> Für $u, v \in \mathbb{R}^3$ bezeichnen wir mit $u \times v$ (oder $u \wedge v$) den eindeutigen Vektor aus $\mathbb{R}^3$ mit

$$(u \times v) \bullet w = \det(u\ v\ w) \quad \forall w \in \mathbb{R}^3.$$

$u \times v$ heißt das <u>Vektorprodukt von u mit v</u> (Reihenfolge!).

<u>Formel für $u \times v$:</u> Es ist für

$$u = \sum_{i=1}^{3} u_i \overline{e}_i, \quad v = \sum_{i=1}^{3} v_i \overline{e}_i, \quad w = \sum_{i=1}^{3} w_i \overline{e}_i$$

$$\det(u\ v\ w) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$= w_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix},$$

wenn man die 3×3 Determinante nach der letzten Spalte entwickelt. Setzt man an

$$u\times v = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3 ,$$

so folgt $(u\times v)\cdot w = a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3$,

und Vergleich ergibt

$$\boxed{u\times v = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}\bar{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}\bar{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}\bar{e}_3} .$$

<u>Rechenregeln für $u\times v$:</u>

i) $u\times v = -v\times u$

ii) $(\alpha u + \beta\tilde{u})\times v = \alpha\, u\times v + \beta\,\tilde{u}\times v$

iii) $u\times v = 0 \iff u, v$ linear abhängig

iv) $u\times v \perp u$ und $u\times v \perp v$, d.h.

$$(u\times v)\cdot u = (u\times v)\cdot v = 0.$$

Beweis: Man benutze $(u \times v) \cdot w = \det(u\, v\, w)$,

also $(v \times u) \cdot w = \det(v\, u\, w) = -\det(u\, v\, w)$

$= -(u \times v) \cdot w$, und da w beliebig ist, folgt i).

Für ii) beachte die Linearität von $u \mapsto \det(u\, v\, w)$.

iii) Es ist $u \times v = 0 :\Leftrightarrow \det(u\, v\, w) = 0$

für alle $w \in \mathbb{R}^3$, und das ist äquivalent zur linearen

Abhängigkeit von u und v.

iv) klar, da z. B. $(u \times v) \cdot u = \det(u\, v\, u) = 0$. $\square$

<u>Bemerkungen</u>: 1.) Seien u, v l. u. Dann gilt

$$0 < |u \times v|^2 = (u \times v) \cdot (u \times v) =$$

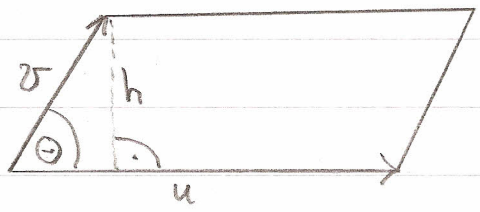
$$\det(u\ v\ u \times v),$$

mithin ist $(u, v, u \times v)$ eine positiv orientierte Basis.

2.) Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ l. u. Dann erzeugen sie ein

Parallelogramm mit

Fläche $A = |u|\, h$,



$h :=$ Höhe $= |v| \sin \Theta$. Hierbei ist Θ der Winkel zwischen u und v, also $\cos \Theta = \frac{u}{|u|} \cdot \frac{v}{|v|}$. Es folgt:

$$|u \times v|^2 = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}^2$$

$$= \ldots = |u|^2 |v|^2 - (u \cdot v)^2$$

$$= |u|^2 |v|^2 (1 - \cos^2 \Theta) = A^2,$$

d.h. $|u \times v|$ ist der Flächeninhalt des von u und v aufgespannten Parallelogramms.

3.) Sind $u, v : I \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar, so gilt die

<u>Produktregel</u>

$$\frac{d}{dt}\left(u(t) \times v(t)\right) = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t).$$